

Caracterização de suspensões floculentas com base em modelagem matemática da sedimentação em proveta

Characterization of flocculent suspensions based on mathematical modelling of batch settling tests

A. S. Silva¹; P. L. Santana²; R. L. Pagano²; E. Jesus²; C. P. S. Rocha²

¹*Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, 491000-000, São Cristóvão-SE, Brasil*

²*Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, 491000-000, São Cristóvão-SE, Brasil*
ass@infonet.com.br

(Recebido em 04 de abril de 2013; aceito em 27 de maio de 2013)

Este trabalho, com base em modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta para as regiões de sedimentação livre e de transição, trata da caracterização de suspensões floculentas por meio de equações resultantes da comparação de duas velocidades funções da porosidade, feita com o objetivo de transferir informações da velocidade determinada pelo modelo matemático para outra na forma de função potência com uma nova base, a qual na porosidade inicial é uma velocidade do tipo “Richardson e Zaki” modificada para a inclusão do grau de floculação. A velocidade do modelo matemático é a das partículas sólidas na região de transição, e é dada por uma equação que envolve as velocidades de sedimentação livre e da onda de aceleração e a porosidade inicial. Os parâmetros de caracterização, inclusive a porosidade inicial, obtidos das equações resultantes da comparação, ficam estabelecidos em função das velocidades de sedimentação livre e da onda de aceleração, sendo tais velocidades determinadas diretamente dos dados experimentais de altura em função do tempo da interface superior descendente. Desse modo, a caracterização é feita com apenas um teste de proveta para cada concentração inicial. Os resultados obtidos, a exemplo do grau de floculação, da densidade do floco, da velocidade de Stokes e do diâmetro do floco, concordam com dados da literatura.

Palavras-chave: Suspensões floculentas; grau de floculação; sedimentação gravitacional

This work using mathematical modeling based on batch settling tests for free sedimentation and transition regions, addresses the characterization of flocculent suspensions by equations resulting from the comparison of two velocities as functions of porosity that transfers information from velocity determined by the mathematical model to another one in form of power function with a new base, which in the initial porosity is velocity function type Richardson and Zaki modified to include the degree of flocculation. The mathematical model velocity refers to solid particles in the transition region, and it is given by an equation involving free settling velocity, acceleration wave velocity and initial porosity. The characterization parameters, including the initial porosity, obtained from the equations resulting from the comparison are determined using the free settling velocity and acceleration wave velocity, which are determined directly from experimental data involving descending interface height versus time. Thus, characterization is performed using the results of a single batch settling test for each initial concentration. The results, such as the degree of flocculation, floc density, Stokes' velocity and floc diameter are consistent with the literature data.

Keywords: flocculent suspensions; degree of flocculation; batch settling tests

1. INTRODUÇÃO

Experimentos de sedimentação gravitacional em batelada são importantes para a determinação de parâmetros de sedimentação [1]. No caso do processo de sedimentação de suspensões floculentas, experimentos adicionais preliminares são necessários para a caracterização das mesmas, a qual consiste na determinação de parâmetros como a densidade e o diâmetro médio dos flocos, e também do grau de floculação, sendo uma das metodologias usadas aquela proposta por [2], que é baseada em vários experimentos de sedimentação em proveta para concentrações diferentes. Além dos experimentos de caracterização, é preciso também experimentos para a determinação da porosidade. Por isso, visando reduzir o número de experimentos [3], este trabalho, com base na modelagem matemática desenvolvida por [4,5]

para a sedimentação gravitacional em proveta, tem objetivo de apresentar uma metodologia baseada na comparação de duas funções velocidades que fornece parâmetros de sedimentação como função de duas velocidades características: a velocidade de sedimentação livre e a velocidade da onda de aceleração [6,7]. Como para cada concentração inicial tais velocidades são determinadas diretamente dos dados de altura *versus* tempo da interface superior descendente, os parâmetros ficam estabelecidos sem a necessidade de outros testes com concentrações diferentes.

2. METODOLOGIA

De acordo com o modelo matemático proposto por [4], desde o início do movimento de queda das partículas sólidas até o término, a região ocupada pela suspensão na proveta fica dividida em sub-regiões, as quais podem ser caracterizadas de acordo com a Figura 1.

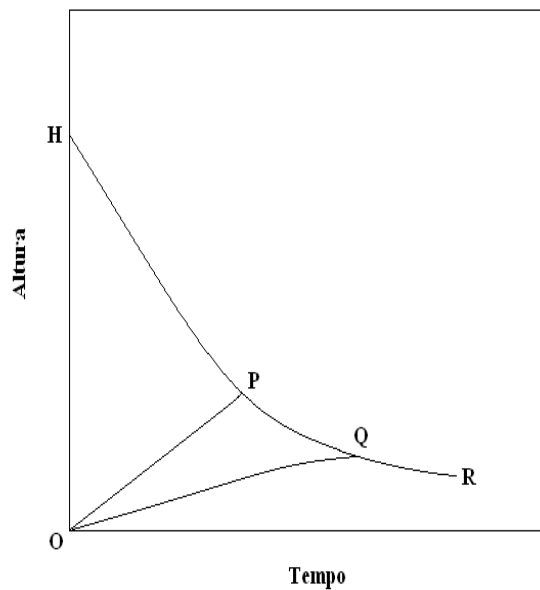


Figura 1: Gráfico representativo do modelo proposto para sedimentação em proveta

Na Figura 1, OPHO corresponde à região de sedimentação livre (SL), OPQO corresponde à região de transição (RT) e a região limitada por OQR e o eixo dos tempos corresponde à região de compressão (RC). As curvas HPQR, OP e OQ correspondem, respectivamente, às alturas da interface superior descendente, da onda de aceleração e da interface inferior ascendente.

Velocidade na região de transição

A velocidade v de queda das partículas sólidas na região de transição é dada pela relação

$$v = (u_0 + w_0) \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} - w_0 \quad (1)$$

para $0 < t < t_c$, onde u_0 é a velocidade de sedimentação livre, w_0 é a velocidade da onda de aceleração, ε_0 é a porosidade inicial, t é variável tempo e t_c é o instante de encontro das interfaces.

Velocidade de sedimentação livre

A velocidade de sedimentação livre é determinada diretamente da parte reta do gráfico da altura x *versus* t da interface superior descendente.

$$x = H - u_0 t \quad (2)$$

para $0 \leq t \leq t_0$, onde H é o valor inicial de x , t é variável tempo, t_0 é o instante de encontro da onda de aceleração com a interface superior.

Velocidade da onda de aceleração

Quanto ao cálculo da velocidade da onda de aceleração, w_0 , a mesma depende do par (x_0, t_0) que representa o ponto final da parte reta do gráfico x versus t . Se (x_0, t_0) estiver bem definido, ou seja, quando o gráfico experimental x versus t apresentar uma parte reta bem nítida, com término bem visível, w_0 é calculada por:

$$w_0 = \frac{x_0}{t_0} \quad x_0 \equiv x(t_0) \quad (3)$$

Quando não, w_0 é o valor mínimo positivo de w , obtido pela substituição de pontos experimentais (x, t) na Equação 4 de acordo com [5]:

$$w(x, t) = \frac{u_0 x^2}{2H(H - x) - (2H - x)u_0 t} \quad (4)$$

para $0 < u_0 t < H$.

Comparação de duas funções velocidades

Informações contidas na Equação 1 podem ser usadas na preparação de uma estrutura para obtenção de parâmetros de sedimentação, inclusive de suspensões floculentas, a qual começa com a Equação 5.

$$u_0 = u_s \mathcal{E}_0^n \quad (5)$$

formulada por [8], onde n é o expoente de Richardson e Zaki e u_s é a velocidade de Stokes.

Para inclusão do grau de floculação, a Equação 5 pode ser modificada [2] para a forma

$$u_0 = u_s (1 - kC_0)^n \quad (6)$$

onde C_0 é a concentração inicial da suspensão e k é o grau de floculação expresso por

$$kC_0 = 1 - \mathcal{E}_0 \quad (7)$$

ressaltando-se que u_s na Equação 6 é a velocidade de Stokes relativa ao floco. Além disso, o diâmetro médio de Stokes do floco, d_s , e a densidade do floco, ρ_{fl} , são dados pelas relações:

$$d_s^2 = \frac{18\mu u_s}{(\rho_{fl} - \rho_f)g} \quad (8)$$

$$\rho_{fl} = \rho_f + \frac{(\rho_s - \rho_f)}{k\rho_s} \quad (9)$$

onde ρ_s é a massa específica do sólido, ρ_f a massa específica do fluido, g a aceleração da gravidade e μ a viscosidade do fluido.

As Equações 5 e 6 sugerem transferir informações da velocidade expressa pela Equação 1 para outra na forma de função potência com uma nova base E , a qual na porosidade inicial é uma velocidade do tipo Richardson e Zaki. Para isso, sendo U uma velocidade constante, m um expoente constante e α uma constante adimensional, define-se a função velocidade u pela expressão

$$u = UE^m \quad (10)$$

$$E = 1 - \alpha(1 - \varepsilon) \quad (11)$$

para ser comparada com a função velocidade definida pela Equação 1, com base no fato de que existe uma porosidade ε_I tal que

$$v = u \quad v' = u' \quad v'' = u'' \quad (12)$$

as quais fornecem as relações 13 a 17.

$$\frac{1 - \varepsilon_I}{1 - \varepsilon_0} = \frac{m+1}{2m} \left(\frac{u_0}{w_0} + 1 \right) \quad (13)$$

$$E(\varepsilon_I) = \frac{m-1}{m+1} \equiv \theta \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{4mw_0}{(m+1)^2(1-\varepsilon_0)(u_0+w_0)} \quad (15)$$

$$v(\varepsilon_I) = u(\varepsilon_I) = \frac{m-1}{m+1} w_0 \quad (16)$$

$$w_0 = U \left(\frac{m-1}{m+1} \right)^{m-1} \quad (17)$$

Os resultados acima devem ser usados como base para a obtenção de uma fórmula para o cálculo da porosidade inicial, importante para reduzir o número de experimentos. Para isso, vale observar que a função definida pelas Equações 10 e 11 envolve duas porosidades: a própria base E e a porosidade ε . Com isso, podem ser definidas duas porosidades E_0 e ε_0 , do seguinte modo:

$$1 - \alpha(1 - E_0) = \varepsilon_0 \quad (18)$$

$$1 - \alpha(1 - \varepsilon_0) = E_0 \quad (19)$$

Desse modo, segue das Equações 18 e 19 que

$$\alpha = \sqrt{\frac{1-\epsilon_0}{1-E_0}} \quad (20)$$

e, além disso, usando as Equações 14, 15 e 19 tem-se a relação

$$\epsilon_0 = \frac{u_0 + \theta^2 w_0}{u_0 + w_0} \quad (21)$$

que é uma porosidade que não envolve diretamente a porosidade inicial.

Das Equações 1 e 11, a base E pode ser escrita como função da velocidade v . Assim, para a classe de suspensões com $\epsilon_0 < \epsilon_0 < E_0$, a porosidade E_0 , que figura na Equação 18, é função de uma velocidade acima de u_0 . Motivado nisso e na forma da Equação 16, este trabalho considera tal classe de suspensões com a condição expressa na Equação 22.

$$E = E_0 \quad \text{para} \quad v = \frac{m+1}{m-1} u_0 \quad (22)$$

Com isso, a partir das Equações 1, 11, 14, 15 e 22, chega-se ao seguinte resultado

$$E_0 = \frac{u_0 + \theta^3 w_0}{u_0 + \theta w_0} \quad (23)$$

que é também uma porosidade que não depende diretamente da porosidade inicial. Assim, as Equações 20 a 23, fornecem

$$\alpha = \sqrt{\frac{\frac{u_0}{\theta} + w_0}{u_0 + w_0}} \quad (24)$$

sem envolver diretamente a porosidade inicial. Desse modo, por meio das Equações 14, 19, 21, 24, a porosidade inicial fica determinada por:

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{1-\epsilon_0}{\alpha} \quad (25)$$

Consequentemente, a velocidade de Stokes, o grau de floculação, a densidade dos flocos e o diâmetro médio dos flocos ficam determinados pelas Equações 5 a 9.

3. RESULTADOS

As Tabelas 1 e 2 foram elaboradas com os dados experimentais apresentados por [9].

Para um teste de proveta com altura inicial da suspensão $H=40$ cm e porosidade inicial da suspensão $\epsilon_0=0,960$, a Tabela 1 mostra um exemplo de cálculo de w_0 como mínimo de w definida pela Equação 4, sendo u_0 determinada pela Equação 2.

Tabela 1: Determinação do valor mínimo de w para a suspensão aquosa de CaCO_3

t (min)	x (cm)	w (cm/min)
8,50	35,00	2,24
20,10	30,00	1,05
33,30	25,00	0,65
48,90	20,00	0,51
52,50	18,00	0,39
56,00	17,00	0,38
59,50	16,00	0,39
64,10	15,00	0,46
68,60	14,00	0,63
73,50	13,00	1,71

A Tabela 2 compara valores de w_0 calculado pelas Equações 3 e 4.

Tabela 2: Valores de w_0 para diversas suspensões

Suspensão aquosa	w_0 (cm/min)	
	Eq. 3	Eq. 4
CaCO_3 : $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,977$, $u_0 = 2$ cm/min	2,00	2,14
CaO : $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,972$, $u_0 = 1,54$ cm/min	0,58	0,62
Caulim: $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,913$, $u_0 = 1,40$ cm/min	0,74	0,70
CaSO_4 : $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,980$, $u_0 = 2,75$ cm/min	3,71	3,92
Borra de carbureto: $H = 30,7$ cm, $\varepsilon_0 = 0,970$, $u_0 = 2,62$ cm/min	1,48	1,50
Barita: $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,975$, $u_0 = 1,52$ cm/min	0,70	0,69

A Tabela 3 foi formada com base nas Equações 2, 4 a 9, 14, 21 a 25, para suspensão aquosa de caulim com dados experimentais apresentados em [2] com $n = 4,65$. Para efeito de comparação nos mesmos termos, o valor usado para m foi $m = n = 4,65$.

Tabela 3: Suspensão floculada de caulim em água ($\rho_s = 2,58$ g/cm³)

C_0 g/cm ³	u_0 cm/min	w_0 cm/min	ε_0	u_s cm/min	k cm ³ /g	ρ_f g/cm ³	d_s μm
0,00568	1,60	0,28	0,92834	2,26	12,62	1,05	137
0,00836	1,25	0,43	0,87431	2,33	15,03	1,04	128
0,01097	0,90	0,44	0,83643	2,07	14,91	1,04	121
0,01295	0,77	0,55	0,78867	2,32	14,20	1,04	131
Valores médios				2,25	14,19	1,04	129
Valores médios (Michaels e Bolger)				2,20	15,50	1,04	122

Deve-se ressaltar que as Equações 1, 11, 14 a 15 produzem a relação,

$$E = \frac{v + \theta^2 w_0}{v + w_0} \quad (26)$$

que expressa porosidade como função da velocidade, de forma genérica, sem envolver diretamente a porosidade inicial. Dessa forma, com um único teste de proveta, uma faixa de porosidades pode ser gerada com o uso da Equação 26, importante para a determinação de valores médios de parâmetros de sedimentação, sem a necessidade de realizar outros testes com concentrações diferentes.

4. CONCLUSÃO

De acordo com o modelo matemático desenvolvido por [4,5], para a sedimentação gravitacional em proveta, não só a velocidade de sedimentação livre pode ser determinada diretamente dos dados experimentais de altura da interface superior descendente *versus* tempo, mas também a velocidade da onda de aceleração. Como a comparação de duas funções velocidades mostrou que outros parâmetros de sedimentação, incluindo-se a porosidade inicial, são determinados diretamente por fórmulas envolvendo tais velocidades, dados experimentais de altura *versus* tempo podem ser usados para a caracterização de suspensões floculentas com apenas um teste de proveta para cada concentração inicial.

-
1. SILVA, A. S.; SANTANA, P. L.; MARQUES, J. J. “Caracterização de suspensões floculentas com base nas velocidades de sedimentação livre e da onda de aceleração”. Congresso Brasileiro de Engenharia Química, XVIII COBEQ, 2010. Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Química. Foz do Iguaçu. 1 CD-ROM.
 2. MICHAELS, A. S.; BOLGER, J. C. (1962), “Settling Rates and Sediment Volumes of Flocculated Kaolin Suspensions”, IEC Fundamentals, Vol. 1, n. 1, p. 24-33.
 3. DIEHL, S. (2007), “Estimation of the batch-settling flux function for an ideal suspension from only two experiments”, Chemical Engineering Science, v. 62, p. 4589-4601.
 4. SILVA, A. S. Um modelo matemático para a sedimentação em batelada pelo uso da teoria de misturas, COPPE/UFRJ, 1985, Rio de Janeiro - RJ, 90p. (tese de doutorado).
 5. SILVA, A. S. “Velocidade da onda de aceleração em sedimentação gravitacional em batelada”, 1989. Anais XVII ENEMP, v. 2, p. 109-112.
 6. SILVA, A. S.; SANTANA, P. L. “Estudo Sobre a Função Porosidade no Processo de Sedimentação Gravitacional em Batelada”, 2007. Anais do XXXIII Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados, T-4-08, 8p.
 7. SILVA, A. S.; SANTANA, P. L.; MARQUES, J. J. “Prediction of Sedimentation Parameters Through Mathematical Modelling on Batch Tests”, 2008. Anais do XVII Congresso Brasileiro de Engenharia Química, T-1562, 8p.
 8. RICHARDSON, J. F.; ZAKI, W. N. (1954), “The Sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow”, Chemical Engineering Science, v. 23, p. 65-73.
 9. SCHIRMER, H. P. (1980) Projeto de Sedimentador III, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro - RJ, 82p. (dissertação de mestrado).